

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică M_{st-nat}

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

THEMA I

(30 Puncte)

- 5p** 1. Bestimme das Glied a_1 der arithmetischen Folge $(a_n)_{n \geq 1}$, so, dass $a_2 = 8$ und $a_3 = 12$.
- 5p** 2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Bestimme die reelle Zahl m so, dass $f(m) = m$.
- 5p** 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_6(9 - x^2) = \log_6 5$.
- 5p** 4. Gegeben ist die Menge $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass für eine gewählte Zahl n aus der Menge A , die Zahl $\sqrt{2n+1}$ zur Menge A gehört.
- 5p** 5. Gegeben sind die Punkte $A(1,0)$, $B(4,4)$ und $C(5,2)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy . Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig in C ist.
- 5p** 6. Gegeben ist der Ausdruck $E(x) = 2 \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3x}{4} \right)^2$. Zeige, dass $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

THEMA II

(30 Puncte)

1. Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $B(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-3 & 4a-1 \end{pmatrix}$, wobei a eine reelle Zahl ist.
- 5p** a) Zeige, dass $\det(B(1)) = 7$.
- 5p** b) Zeige, dass $B(2) - B(0) \cdot B(1) = 4A$.
- 5p** c) Bestimme die reellen Zahlen a so, dass die Matrix $C(a) = B(a) - aA$ **nicht** umkehrbar ist.
2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x * y = xy - 2x - 3y + 6$.
- 5p** a) Zeige, dass $2 * 2 = 0$.
- 5p** b) Bestimme die reelle Zahl x so, dass $x * 6 = x$.
- 5p** c) Bestimme die Menge der reellen Zahlen x so, dass $x * (2 * x) \geq 2$.

THEMA III

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 4}$.
- 5p** a) Zeige, dass $f'(x) = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + x + 4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f .
- 5p** c) Zeige, dass $f(x) - f(4-x) \leq 1$, für jedes $x \in [4, +\infty)$.
2. Gegeben ist die Funktion $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.
- 5p** a) Zeige, dass $\int_0^2 (x+1) f(x) dx = 8$.
- 5p** b) Zeige, dass $\int_0^1 f(x) dx = 1 + 2 \ln 2$.
- 5p** c) Bestimme die reelle Zahl a so, dass $\int_1^2 (x^2 - 1) e^x f(x) dx = e(e+a)$.