

**Examenul național de bacalaureat 2024**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 10**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**ЗАВДАННЯ I**

**(30 балів)**

- 5p** 1. Визначте член  $a_1$  арифметичної прогресії  $(a_n)_{n \geq 1}$ , у якому  $a_2 = 8$  і  $a_3 = 12$ .
- 5p** 2. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 2$ . Знайдіть дійсне число  $m$  для якого  $f(m) = m$ .
- 5p** 3. Розв'яжіть у множині дійсних числах рівняння  $\log_6(9 - x^2) = \log_6 5$ .
- 5p** 4. Розглядають множину  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Визначте ймовірність того, що вибираючи одне число  $n$  з множини  $A$ , число  $\sqrt{2n+1}$  належить множині  $A$ .
- 5p** 5. У декартовому репері  $xOy$  розглядають точки  $A(1,0)$ ,  $B(4,4)$  і  $C(5,2)$ . Докажіть, що трикутник  $ABC$  прямокутний у вершині  $C$ .
- 5p** 6. Розглядають вираз  $E(x) = 2 \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3x}{4}\right)^2$ . Докажіть, що  $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ .

**ЗАВДАННЯ II**

**(30 балів)**

1. Розглядають матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  і  $B(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-3 & 4a-1 \end{pmatrix}$ , де  $a$  - дійсне число.
- 5p** а) Докажіть, що  $\det(B(1)) = 7$ .
- 5p** б) Докажіть, що  $B(2) - B(0) \cdot B(1) = 4A$ .
- 5p** в) Визначте дійсні числа  $a$  для яких матриця  $C(a) = B(a) - aA$  не є оборотною.
2. На множині дійсних числах розглядають закон композиції  $x * y = xy - 2x - 3y + 6$ .
- 5p** а) Докажіть, що  $2 * 2 = 0$ .
- 5p** б) Визначте дійсне число  $x$  для якого  $x * 6 = x$ .
- 5p** в) Визначте множину дійсних чисел  $x$  для яких  $x * (2 * x) \geq 2$ .

**ЗАВДАННЯ III**

**(30 балів)**

1. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 4}$ .
- 5p** а) Докажіть, що  $f'(x) = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + x + 4)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** б) Напишіть рівняння горизонтальної асимптоти до  $+\infty$  для графіка функції  $f$ .
- 5p** в) Докажіть, що  $f(x) - f(4-x) \leq 1$ , для будь-якого  $x \in [4, +\infty)$ .
2. Розглядають функцію  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ .
- 5p** а) Докажіть, що  $\int_0^2 (x+1) f(x) dx = 8$ .
- 5p** б) Докажіть, що  $\int_0^1 f(x) dx = 1 + 2 \ln 2$ .
- 5p** в) Визначте дійсне число  $a$  для якого  $\int_1^2 (x^2 - 1) e^x f(x) dx = e(e+a)$ .