

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg annak a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladványnak a b_1 tagját, amelyben $b_3 = 40$ és $b_4 = 80$.
- 5p 2. Határozza meg azon m valós számok halmazát, amelyre az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ függvény grafikus képe két különböző pontban metszi az Ox tengelyt!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 63$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott n szám esetén az n^2 egy háromjegyű természetes szám legyen!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1,2)$, $B(7,4)$ és C pontok úgy, hogy $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Határozza meg annak a D pontnak a koordinátáit, amelyre $\overline{OD} = \overline{CB}$.
- 5p 6. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB=10$, a magasság $AD=8$ és a D pontnak az AC egyenestől való távolsága $4\sqrt{2}$. Igazolja, hogy az ABC háromszög területe egyenlő 56.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} ax + y - az = 1 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ x - 3y + az = -3 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(0)) = -2$.
- 5p b) Határozza meg azon a valós számok halmazát, amelyre az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van!
- 5p c) Ha $a=1$, határozza meg az egyenletrendszer azon (x_1, y_1, z_1) és (x_2, y_2, z_2) megoldásait, amelyekre $y_1 = x_2$ és $z_1 = y_2$.
2. Az $M = (0, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2} - 2$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 * 4 = 3$.
- 5p b) Határozza meg az $x \in M$ értékeit, amelyekre $x * x = 1$.
- 5p c) Igazolja, hogy az $[1, +\infty)$ halmaz stabil részhalmaza az M halmaznak a „ $*$ ” műveletre nézve!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozza meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!
- 5p c) Határozza meg azokat az n természetes számokat, amelyekre az $f(x) = n$ egyenletnek **nincs** megoldása!

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy $\int_{-1}^2 (2x^2 + 1)f(x) dx = 3$.

5p b) Igazolja, hogy $\int_0^2 \sqrt{f(x)} dx = 1$.

5p c) Minden n nemnulla természetes szám esetén adott az $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(\sqrt{e^x})} dx$ szám. Igazolja, hogy

$$(n+1)I_n - I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}, \text{ bármely } n \text{ nemnulla természetes szám esetén!}$$