

**Examenul național de bacalaureat 2025**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**I. FELADATSOR**

**(30 pont)**

- 5p** 1. Igazolja, hogy  $2i(6-i) + 3(1-4i) = 5$ , ahol  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 5$  függvény. Határozza meg az  $a$  valós számot, amelyre  $(f \circ f)(a) = 2a$ .
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $\sqrt{x^2 + 4x - 4} = x\sqrt{2}$  egyenletet!
- 5p** 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az egyjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott  $n$  szám esetén, a  $2^n$  szám osztható legyen 16-tal!
- 5p** 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(3,1)$  és  $B(2,4)$  pontok. Igazolja, hogy az  $OAB$  háromszög derékszögű  $A$ -ban!
- 5p** 6. Adott az  $E(x) = \sin x + 2 \cos 2x + 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  kifejezés, ahol  $x$  valós szám. Bizonyítsa be, hogy  $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**II. FELADATSOR**

**(30 pont)**

1. Adott az  $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $x$  valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $\det(A(1)) = 4$ .
- 5p** b) Igazolja, hogy  $A(-1) \cdot A(x) = A(-2x-1)$ , bármely  $x$  valós szám esetén!
- 5p** c) Határozza meg azokat az  $(m, n)$ ,  $m < n$  természetes számpárokat, amelyekre  $A(-1) \cdot (A(m) + A(n)) = 2A(-4)$ .
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x \circ y = x \cdot 3^y + y \cdot 3^x$  művelet.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $1 \circ 2 = 15$ .
- 5p** b) Igazolja, hogy  $e = 0$  a „ $\circ$ ” művelet semleges eleme!
- 5p** c) Határozza meg azt az  $x$  nemnulla valós számot, amelyre  $x \circ (3x) = (2x) \circ (2x)$ .

**III. FELADATSOR**

**(30 pont)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3x + 3}$  függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{e^x(x^2 + x)}{(x^2 + 3x + 3)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Igazolja, hogy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy  $f(x) - f(y) \leq \frac{3-e}{3e}$ , bármely  $x$  és  $y$ ,  $x \leq 0 \leq y$  valós szám esetén!
2. Adott az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x + 1 + 3x \ln x$  függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy  $\int_1^2 (f(x) - 3x \ln x) dx = 7$ .

**5p** b) Igazolja, hogy  $\int_1^e \frac{f(x) - 4x - 1}{x} dx = 3$ .

**5p** c) Határozza meg azt az  $a$  valós számot, amelyre  $\int_2^4 \frac{f(x) - 1}{x^2 \ln x} dx = a \ln 2$ .